CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O **Círculo Trigonométrico,** também chamado de Ciclo ou Circunferência Trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.
A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em grau (º) ou radiano (rad).

- 1º corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência. A circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1°, ou seja, a circunferência possui 360º.
- 1 radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido.

Para auxiliar nas medidas, confira abaixo algumas relações entre graus e radianos:

- π rad = 180°
- 2π rad = 360°
- $\frac{\pi}{2}$ rad = 90°
- $\frac{\pi}{3}$ rad = 60°
- $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°
- $\frac{\pi}{6}$ rad = 30º

Obs: Se quiser converter essas unidades de medidas (grau e radiano) utiliza-se a regra de três. Exemplos:
1 - Converta graus em radianos: 15º - 150º - 225º - 300.

grau	rad
180	π
15	x

$$180x = 15\pi \rightarrow x = \frac{15\pi}{180} \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

2 – Converta radianos em graus: $\frac{\pi}{5}$ rad - $\frac{3\pi}{4}$ rad - $\frac{7\pi}{6}$ rad

$$\frac{\pi}{12} = \frac{180°}{12} = 15°$$

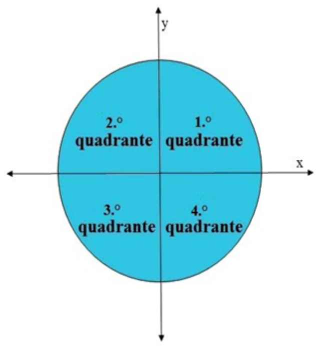
$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\,.\,180°}{4} = \frac{540°}{4} = 135°$$

3 – Converter:

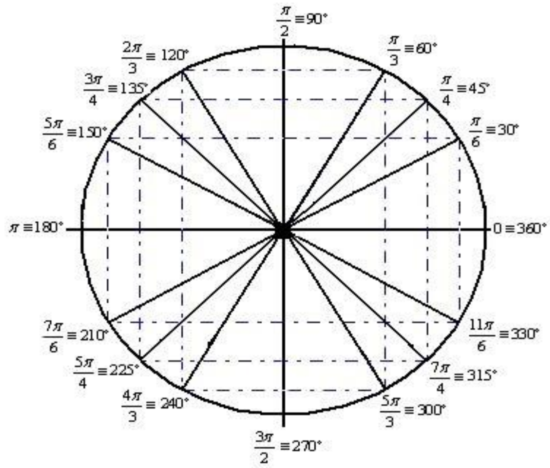
a) 230º =
b) 310º =
c) $\frac{4\pi}{3} rad =$
d) $\frac{2\pi}{3} rad =$
e) $\frac{11\pi}{6} rad =$

Quadrantes do Círculo Trigonométrico

Quando dividimos o círculo trigonométrico em quatro partes iguais, temos os **quatro quadrantes** que o constituem. Para compreender melhor, observe as figuras abaixo:



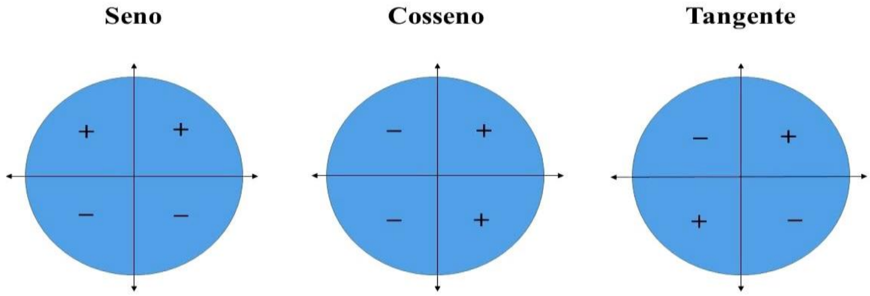
1º Quadrante: 0º < x < 90º
2º Quadrante: 90º < x < 180º
3º Quadrante: 180º < x < 270º
4º Quadrante: 270º < x < 360º



Círculo Trigonométrico e seus Sinais

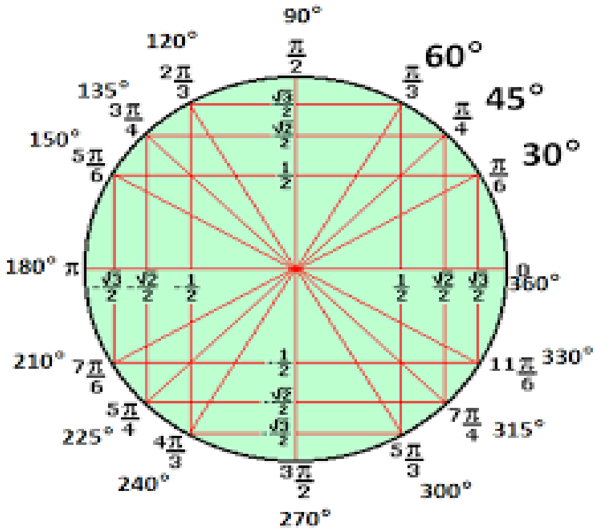
De acordo com o quadrante em que está inserido, os valores do seno, cosseno e tangente variam.

Ou seja, os ângulos podem apresentar um valor positivo ou negativo.
Para compreender melhor, veja a figura abaixo:



Ângulos notáveis no círculo trigonométrico

No início do estudo da trigonometria, aprendemos que os ângulos notáveis são os ângulos de 30º, 45º e 60º, que têm o valor do seno, cosseno e tangente conhecidos. Porém, devido à simetria do ciclo trigonométrico, **é possível encontrar o valor do seno e do cosseno para esses ângulos e os ângulos simétricos** a ele em cada um dos quadrantes.
De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao **seno** e o eixo horizontal ao **cosseno**.



Simetria no círculo

Analisando o ciclo trigonométrico, **é possível construir uma maneira de reduzir o seno, cosseno e tangente ao primeiro quadrante**. Essa redução significa encontrar no primeiro quadrante um ângulo que seja simétrico a um ângulo dos demais quadrantes, pois, quando trabalhamos com um ângulo simétrico, o valor das razões trigonométricas é o mesmo, mudando apenas o seu sinal.

- **Redução de um ângulo que está no 2º quadrante para o 1º quadrante**

Começando com os ângulos que estão no 2º quadrante, temos que:
Como sabemos, no 1º e 2º quadrantes, o seno é positivo. Então, para calcular a redução do seno do 2º quadrante para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

$$\text{sen } x = \text{sen } (180^\circ - x)$$

O cosseno e a tangente no 2º quadrante são negativos. Para fazer a redução do cosseno do 2º quadrante para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

$$\cos x = -\cos (180^\circ - x)$$
$$\text{tg } x = -\text{tg } (180^\circ - x)$$

Exemplo:
Qual é o valor do seno, cosseno e da tangente de um ângulo de 120º?
O ângulo de 120º é um ângulo do segundo quadrante, pois está entre 90º e 180º. Para fazer a redução desse ângulo ao 1º quadrante, calculamos:

sen 120º = sen (180º – 120º) → sen 120º = sen 60º

O ângulo de 60º é um ângulo notável, logo o valor do seu seno é conhecido, então: $\boldsymbol{sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Agora calcularemos o seu cosseno:

cos 120º = – cos (180 – 120) → cos 120º = – cos 60º

Como conhecemos o cosseno de 60º, temos que: $\mathbf{cos\,120° = -\frac{1}{2}}$.

Agora calcularemos a sua tangente:

tg 120º = – tg (180 – 120) → tg 120º = – tg 60º

Como conhecemos a tangente de 60º, temos que: $\boldsymbol{tg\ 120° = -\sqrt{3}}$.

- **Redução de um ângulo que está no 3º quadrante para o 1º quadrante**

Assim como no 2º quadrante, existe uma simetria entre ângulos do 3º quadrante e ângulos do 1º quadrante.
O seno e o cosseno no terceiro quadrante são negativos. Então, para fazer a redução do seno e do cosseno do 3º quadrante para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

sen x = – sen (x – 180º)

cosx = – cos(x – 180º)

A tangente no 3º quadrante é positiva. Para fazer a redução dela, utilizamos a fórmula:

tg x = tg (x – 180º)

Exemplo:

Calcule o seno, o cosseno e a tangente de 225º.

sen 225º = – sen (225º – 180º) → sen 225º = – sen 45º

Como 45º é um ângulo notável, ao consultar a tabela, temos que: $\boldsymbol{sen225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Agora, calculando o cosseno, temos que:

cos 225º = – cos (225º – 180º) → cos 225º = – cos 45º → $\mathbf{cos\,225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Sabemos que a tg45º = 1, então:

tg 225º = tg (225º – 180º) → tg 225º = tg 45º → **tg 225º = 1**

- **Redução de um ângulo que está no 4º quadrante para o 1º quadrante**

Com o mesmo raciocínio das reduções anteriores, há uma simetria entre o 4º e 1º quadrante:
Os valores do seno e da tangente no 4º quadrante são negativos. Então, para fazer a redução do 4º para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

sen x = – sen (360º – x)

tg x = – tg (360º – x)

Já o cosseno no 4º quadrante é positivo. Então, para reduzir ao 1º quadrante, a fórmula é:

cos x = cos (360º – x)

Exemplo:

Calcule o valor do seno e do cosseno de 330º.

Começando pelo seno:

$sen\ 330° = -sen(360° - 330°)\ \rightarrow sen330° = -sen30°\ \ \rightarrow \boldsymbol{sen\ 330° = -\frac{1}{2}}$.

Agora calculando o cosseno:

$cos\ 330° = cos(360° - 330°)\ \rightarrow \cos 330° = \cos 30\,°\ \ \rightarrow \boldsymbol{cos\ 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Calculando a tangente de 330º.

$$tg\ 330° = -tg(360° - 330°)\ \rightarrow tg\ 330° = \ -tg\ 30°\ \rightarrow \boldsymbol{tg\ 330° = \ -\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Primeira Determinação Positiva

Para calcular a primeira determinação positiva de um arco qualquer, basta dividir o seu valor por 360º e tomar – se o resto da divisão.
Por exemplo, calcular a primeira determinação positiva de 1470º.

$$\begin{array}{r|l} 1470^{\circ} & 360^{\circ} \\ \cline{2-2} -\ 1440^{\circ} & \ \ 4 \\ \cline{1-1} 30^{\circ} & \end{array}$$

O quociente da divisão mostra a quantidade de voltas dadas na circunferência e, o resto é onde para a volta seguinte.
Portanto, a primeira determinação positiva de 1470º é 30º.

Agora calcular a primeira determinação positiva de $-1200°$.

$$\begin{array}{r|l} -\ 1200^{\circ} & 360^{\circ} \\ \cline{2-2} 1080^{\circ} & \ \ 3 \\ \cline{1-1} -\ 120^{\circ} & \end{array}$$

E por fim calcula -se: 360º - 120º = 240º. Portanto, a primeira determinação positiva de $-1200°$ é 240º.

EXEMPLOS

1 - Determine em qual quadrante está localizado o ângulo a seguir no sentido positivo e, calcule o seno, o cosseno e a tangente de cada um.

a) 150º =

b) 240º =

c) 315º =

d) $\frac{3\pi}{4} rad =$

e) $\frac{5\pi}{3} rad =$

2 – Calcule o valor da expressão $cos\,\frac{2\pi}{3} + sen\,\frac{5\pi}{6} + tg\,\frac{5\pi}{4}$.

3 – Calcule a primeira determinação positiva de:

a) 810º =

b) $-1620° =$

c) $\frac{38\pi}{3} rad =$

d) $-\frac{143\pi}{6} rad =$